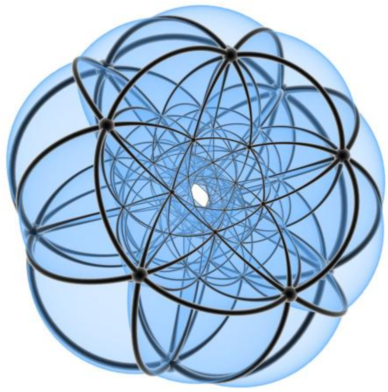
А.П. Потапов

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



Оглавление

Глава 2. Криволинейные интегралы

В предыдущей главе были рассмотрены кратные интегралы. В этой главе мы остановимся на новых разновидностях интеграла: криволинейных интегралах 1 и 2 рода. Из самого названия следует, что эти интегралы рассматриваются вдоль «кривых линий».

Под «кривой линией» (или просто кривой, или просто линией) на плоскости или в пространстве подразумевается непрерывная *спрямляемая* кривая без самопересечений. Такие кривые будем называть *простыми* кривыми. Заметим, что как частный случай, кривая может быть и отрезком прямой линии.

Спрямляемость означает, что кривая имеет конечную длину (см. $[4], \mathbf{14.1}$). Если кривая – замкнутая, то она называется *контуром*.

Изучение криволинейных интегралов начнем с интегралов 1 рода.

2.1. Криволинейный интеграл 1 рода

Здесь, как и в случае кратных интегралов, сначала введем новое понятие и изучим его свойства, затем выведем формулу для вычисления и в заключение рассмотрим некоторые его приложения.

2.1.1. Понятие криволинейного интеграла 1 рода

Рассмотрим *простую* кривую $L = \breve{AB}$ на плоскости или в пространстве. Пусть на этой кривой задана некоторая функция $f(M)$.

Выполним следующие действия.

1. Разбиение кривой L на частичные дуги точками $A_0 \equiv A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \equiv B$:
   $L = \breve{L}_1 \cup \breve{L}_2 \cup \dots \cup \breve{L}_n$ (рис. 2.1),
   где $\breve{L}_k$ - дуга $(A_{k-1}A_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$
2. Выбор промежуточных точек:
   $M_k \in \breve{L}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$
3. Вычисление суммы:
   $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta l_k,$
   где $\Delta l_k = |\breve{L}_k|$ - длина частичной дуги $\breve{L}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

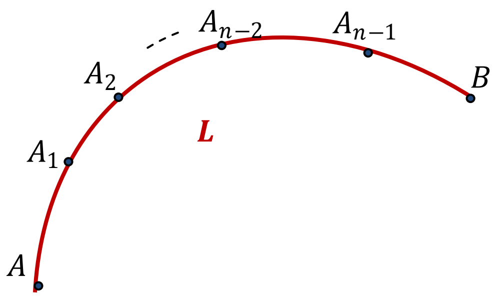


Рис. 2.1. **Разбиение кривой *L***

Сумма σ_n называется интегральной суммой Римана функции $f(M)$ по кривой L.

Пусть $\lambda = max_{1 \le k \le n} \Delta l_k$ - наибольшая из длин частичных дуг - ранг разбиения.

Определение 2.1.

Число I называется пределом интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L с рангом разбиения $\lambda < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек $\{M_k\}_{k=1}^{n}$ выполняется неравенство:

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon.$$

Запись: $I = lim_{\lambda \to 0}\, \sigma_n$ - означает, что при $\lambda \to 0$ этот предел существует, он не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек, и равен числу I.

Определение 2.2.

Конечный предел интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$ называется криволинейным интегралом 1 рода (или криволинейным интегралом *по длине дуги*) от функции $f(M)$ вдоль кривой L.

Обозначения: $\int_L f(M)dl$ или: $\int_L f(x,y)dl$, $\int_L f(x,y,z)dl$.
Встречаются также обозначения: $\int_L f(M)ds$ или: $\int_L f(x,y)ds$, $\int_L f(x,y,z)ds$.

Таким образом, по определению имеем:

$$\boxed{\int_L f(M)dl = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot \Delta l_k}$$ или:

$\boxed{\int_L f(x,y)dl = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\cdot \Delta l_k}$ - для плоской кривой

$\boxed{\int_L f(x,y,z)dl = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta l_k}$ - для пространственной кривой.

Функция $f(M)$, для которой существует криволинейный интеграл 1 рода, называется *интегрируемой* вдоль кривой L.

Пример 2.1.

$$\int_L 0\cdot dl = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} 0\cdot \Delta l_k = \lim_{\lambda\to 0} 0 = 0 \Rightarrow \int_L 0\cdot dl = 0;$$

$\int_L 1\cdot dl = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} 1\cdot \Delta l_k = \lim_{\lambda\to 0} |L| = |L| \Rightarrow \int_L 1\cdot dl = |L|$ - длина кривой L.

<u>Физический смысл</u> криволинейного интеграла 1 рода.

Если $\rho(x,y,z)$ – линейная плотность массы, распределенной вдоль кривой L, то

$m = \int_L \rho(x,y,z)dl$ – масса неоднородной кривой L;

если $q(x,y,z)$ – линейная плотность электрического заряда, распределенного вдоль кривой L, то

$Q = \int_L q(x,y,z)dl$ – заряд всей кривой L.

Замечание 2.1.

Из определения криволинейного интеграла 1 рода вытекает следующее свойство:

$$\int_{\overline{AB}} f(M)dl = \int_{\overline{BA}} f(M)dl,$$

т.е. величина интеграла не зависит от направления, выбранного на кривой L.

<u>Условия интегрируемости</u>.

Сформулируем теоремы об условиях интегрируемости функции вдоль кривой. Доказательства этих утверждений аналогичны случаю кратных интегралов.

Теорема 2.1 (Необходимое условие интегрируемости).

Если функция $f(M)$ интегрируема вдоль кривой, то она ограничена на этой кривой.

Замечание 2.2.

Обратное утверждение неверно: есть ограниченные, но не интегрируемые функции.

Теорема 2.2 (Достаточное условие интегрируемости).

Пусть L - *гладкая* кривая (см. [4], **14.1**), а функция $f(M)$ непрерывна на ней. Тогда эта функция интегрируема вдоль кривой L.

2.1.2. Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1. Нормированность.

Криволинейный интеграл 1 рода от единицы вдоль кривой L равен длине кривой:

$$\int_L 1\cdot dl = |L|.$$

2. Линейность.

Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы вдоль кривой L. Тогда

а) постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла 1 рода:

$$\int_L C\cdot f(M)dl = C\cdot\int_L f(M)dl, \quad C = const;$$

б) криволинейный интеграл 1 рода от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов 1 рода от этих функций:

$$\int_L \big(f(M) + g(M)\big)dl = \int_L f(M)dl + \int_L g(M)dl.$$

Свойство линейности можно записать в следующем виде:

$$\int_L \big(C_1\cdot f(M) + C_2\cdot g(M)\big)dl = C_1\cdot\int_L f(M)dl + C_2\cdot\int_L g(M)dl \quad \forall\, C_1, C_2 = const.$$

3. **Аддитивность**.

Пусть функция $f(M)$ интегрируема вдоль кривой L. Если кривая L разбита на две дуги, то криволинейный интеграл 1 рода по всей кривой равен сумме криволинейных интегралов 1 рода по каждой из этих дуг:

$$\int_L f(M)dl = \int_{L_1} f(M)dl + \int_{L_2} f(M)dl, \quad \text{где } L = L_1\cup L_2 \text{ и } L_1\cap L_2 = \emptyset.$$

4. **Интегрирование неравенств**.

Пусть функции $f(M)$, $g(M)$ интегрируемы вдоль кривой L и удовлетворяют неравенству: $f(M)\geq g(M)\ \ \forall M\in L$. Тогда справедливо неравенство:

$$\int_L f(M)dl \geq \int_L g(M)dl.$$

Следствие 2.1.

а) Если $f(M)\geq 0\ \ \forall M\in L$, то $\int_L f(M)dl \geq 0$.

б) Пусть $f(M)\geq 0\ \ \forall M\in L$, тогда для любых дуг $L_1, L_2\subset L$ справедливо утверждение:

$$L_1\subset L_2 \;\Rightarrow\; \int_{L_1} f(M)dl \leq \int_{L_2} f(M)dl.$$

в) $\left|\int_L f(M)dl\right| \leq \int_L |f(M)|dl.$

5. **Оценки криволинейного интеграла 1 рода**.

Если значения подынтегральной функции $f(M)$ на кривой L ограничены величинами A и B:

$$A\leq f(M)\leq B \quad \forall M\in L,$$

то значение интеграла ограничено величинами $A\cdot|L|$ и $B\cdot|L|$, где $|L|$ - длина кривой:

$$A\cdot|L| \leq \int_L f(M)dl \leq B\cdot|L|.$$

6. **Теоремы о среднем значении**.

Теорема 2.3.

Пусть функция $f(M)$ интегрируема вдоль кривой L и пусть

$$A = inf\,\{f(M),\ M\in L\}; \quad B = sup\,\{f(M),\ M\in L\}.$$

Тогда $\exists\,\mu\in[A;B]$: $\int_L f(M)dl = \mu\cdot|L|$, где $|L|$ - длина кривой.

Число $\mu = \frac{1}{|L|}\cdot\int_L f(M)dl$ - называется *интегральным средним значением* функции $f(M)$ на кривой L.

Теорема 2.4.

Пусть функция $f(M)$ непрерывна на кривой L. Тогда $\exists\, M_0\in L$:

$$\int_L f(M)dl = f(M_0)\cdot|L|, \quad \text{где } |L| \text{ - длина кривой.}$$

Замечание 2.3.

Доказательство всех этих свойств аналогично случаю кратных интегралов.

2.2. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

Покажем, как вычисление криволинейного интеграла 1 рода $\int_L f(x,y,z)dl$ сводится к вычислению определенного интеграла.

2.2.1. Сведéние к определенному интегралу

На кривой $L = \breve{AB}$ введем так называемую *естественную параметризацию*. Это значит, что положение произвольной точки M на кривой L определяется длиной дуги $s = |\breve{AM}|$, отсчитываемой от начальной точки A (рис. 2.2). Тогда кривая L будет задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \ 0 \le s \le |L|, \\ z = z(s) \end{cases}$$

где параметр s (длина дуги) называется *естественным* параметром кривой L.

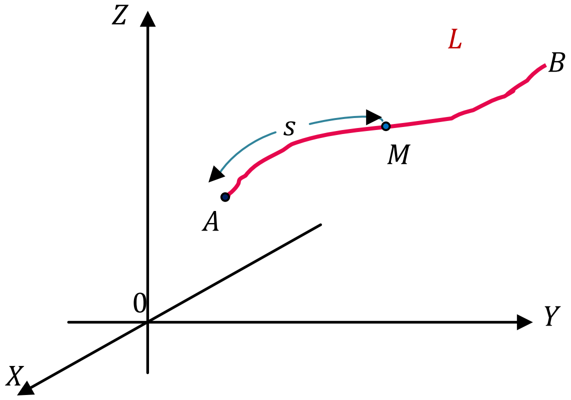


Рис. 2.2. **Иллюстрация к естественной параметризации кривой L**

При этом подынтегральная функция $f(x,y,z)$ сведется к сложной функции:

$$f\big(x(s), y(s), z(s)\big).$$

По определению имеем:

$$\int_L f(x,y,z)dl = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta l_k.$$

Здесь M_k - промежуточная точка на дуге $\breve{L}_k = (A_{k-1}A_k)$, где A_{k-1} и A_k- точки деления кривой L, $\Delta l_k = |\breve{L}_k| = s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$ - длина дуги $\breve{L}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Промежуточная точка $M_k(x_k, y_k, z_k)$ соответствует некоторому значению *естественного* параметра $s = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Введем обозначение: $F(s) = f\big(x(s), y(s), z(s)\big)$. Тогда интегральная сумма Римана запишется в виде:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f\big(x(c_k), y(c_k), z(c_k)\big) \cdot \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} F(c_k) \cdot \Delta s_k.$$

Следовательно, имеем:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(c_k) \cdot \Delta s_k.$$

Если вспомнить понятие определенного интеграла (см. [4], $\mathbf{13.1}$), то можно заметить, что последнее выражение есть не что иное, как определенный интеграл от функции $F(s)$ по промежутку $[0, |L|]$:

$$\int_0^{|L|} F(s)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(c_k) \cdot \Delta s_k.$$

Таким образом, получаем формулу:

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)dl = \int_0^{|L|} F(s)\, ds},$$

где $F(s) = f\big(x(s), y(s), z(s)\big)$.

Полученная формула показывает, что вычисление криволинейного интеграла 1 рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Однако эта формула имеет чисто теоретический интерес: при вычислениях она мало пригодна, так как задать конкретную кривую с помощью *естественной параметризации* удается крайне редко.

Следовательно, необходимо получить формулу для вычисления криволинейного интеграла 1 рода вдоль кривой, заданной произвольными параметрическими уравнениями.

2.2.2. Вычисление интеграла вдоль пространственной кривой

Рассмотрим гладкую кривую L, заданную параметрическими уравнениями:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \; t \in [\alpha;\beta] \\ z = z(t) \end{cases}$, где $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно-дифференцируемые функции.

Для дальнейших выкладок нам потребуется формула для длины кривой. Как известно (см. $[4]$, $\mathbf{14.1}$), длина кривой вычисляется по формуле:

$$\boxed{|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt}.$$

Соответственно, для длины дуги $s = |\breve{AM}|$, где $M\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ - имеем:

$$s = s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,d\tau, \quad \alpha \le \tau \le t.$$

При этом производная функции $s(t)$ равна:

$s'(t) = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2} > 0 \quad \forall\, t \in [\alpha;\beta]$, что обеспечивает строгое возрастание функции $s(t)$.

Теорема 2.5.

Пусть L - гладкая кривая - задана параметрическими уравнениями:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \; t \in [\alpha;\beta] \\ z = z(t) \end{cases}$; пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой L.

Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt}.$$

Доказательство.

В пункте **2.2.1** получена формула:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_0^{|L|} F(s)\,ds = \int_0^{|L|} f\big(x(s), y(s), z(s)\big)\,ds.$$

Сделаем замену переменной в этом определенном интеграле:

$$\begin{bmatrix} s = s(t) \;\Rightarrow ds = s'(t)dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt \\ x(s) = x\big(s(t)\big) = x(t), y(s) = y\big(s(t)\big) = y(t), \; z(s) = z\big(s(t)\big) = z(t) \\ 0 \le s \le |L| \;\Leftrightarrow\; \alpha \le t \le \beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\int_0^{|L|} f\big(x(s), y(s), z(s)\big)\,ds = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt$. Теорема доказана.

Пример 2.2.

Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $I = \int_L z\,dl$, где L - коническая винтовая линия (винтовая линия на конусе): $\begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t, \; t \in [0;\sqrt{2}]. \\ z = t \end{cases}$

Решение.

$$\int_L z\,dl = \begin{bmatrix} x = t \cdot \cos t, \; y = t \cdot \sin t, \; z = t \\ x'(t) = \cos t - t \cdot \sin t, \; y'(t) = \sin t + t \cdot \cos t, \; z'(t) = 1 \\ dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \sqrt{2 + t^2}\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} t \cdot \sqrt{2 + t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 + t^2}\,d(2 + t^2) = \frac{1}{3}\sqrt{(2 + t^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\big(8 - 2\sqrt{2}\big) = \frac{2}{3}\big(4 - \sqrt{2}\big).$$

Ответ: $I = \frac{2}{3}\big(4 - \sqrt{2}\big)$.

2.2.3. Вычисление интеграла вдоль плоской кривой

В случае плоской кривой L, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$ - имеем следующую формулу для вычисления криволинейного интеграла 1 рода:

$$\boxed{\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt}.$$

Если кривая L задана явным уравнением: $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$ - то формула принимает вид:

$$\boxed{\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big) \cdot \sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}\, dx}.$$

Если кривая L задана уравнением в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$ - то формула примет вид:

$$\boxed{\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(\varphi) \cdot \sqrt{r^2 + \big(r'_\varphi\big)^2}\, d\varphi},$$

где $\tilde{f}(\varphi) = f(r(\varphi) \cdot \cos\varphi,\ r(\varphi) \cdot \sin\varphi)$.

Эти формулы являются следствием формул длины плоской кривой при различных способах задания этой кривой ($[4], 14.1$):

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt, \quad |L| = \int_a^b \sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}\, dx, \ |L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \big(r'_\varphi\big)^2}\, d\varphi.$$

Пример 2.3.

Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $I = \int_L \frac{1}{xy}\, dl$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1)$ и $B(2;3)$.

Решение.

Уравнение отрезка прямой линии L, проходящей через две заданные точки $A(1;1)$ и $B(2;3)$ имеет вид (рис. 2.3): $y = 2x - 1$, $x \in [1;2]$.

Применим формулу:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big) \cdot \sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}\, dx,$$

где $y = \varphi(x) = 2x - 1$, $\varphi'(x) = 2$.

$$\int_L \frac{1}{xy}\, dl = \int_1^2 \frac{1}{xy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x(2x-1)} \cdot \sqrt{5}\, dx =$$

$$= \sqrt{5} \cdot \int_1^2 \frac{1}{x(2x-1)}\, dx = \sqrt{5} \cdot \int_1^2 \left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \sqrt{5} \cdot ln\left(\frac{2x-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \sqrt{5} \cdot \left(ln\, \frac{3}{2} - ln\, 1\right) = \sqrt{5} \cdot ln\, 1{,}5.$$

Ответ: $I = \sqrt{5} \cdot ln\, 1{,}5$.

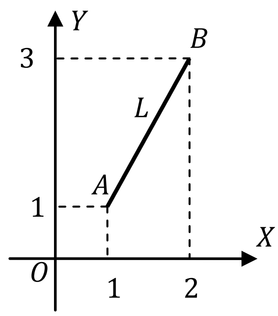


Рис. 2.3. **Иллюстрация к Примеру 2.3**

2.3. Приложения криволинейного интеграла 1 рода

<u>Физические приложения</u>

Масса кривой:

$$m = \int_L \rho(x,y,z)dl \text{ - для пространственной кривой,}$$

$$m = \int_L \rho(x,y)dl \text{ - для плоской кривой,}$$

где $\rho(x,y,z)$ или $\rho(x,y)$ - линейная плотность массы, распределенной вдоль кривой L.

Электрический заряд кривой:

$$Q = \int_L q(x,y,z)dl$$ - для пространственной кривой,

$$Q = \int_L q(x,y)dl$$ - для плоской кривой,

где $q(x,y,z)$ или $q(x,y)$ - линейная плотность заряда, распределенного вдоль кривой L.

Геометрические приложения

Длина кривой: $|L| = \int_L 1 \cdot dl$.

Площадь цилиндрической поверхности:

$S(\mathcal{P}_{цил.}) = \int_L f(M)dl = \int_L f(x,y)dl$.

Здесь цилиндрическая поверхность $\mathcal{P}_{цил.}$ (рис. 2.4) задается условиями:

- образующая параллельна оси OZ;
- направляющей служит кривая L, лежащая в плоскости OXY;
- сверху поверхность ограничена кривой:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ (x,y) \in L \end{cases}.$$

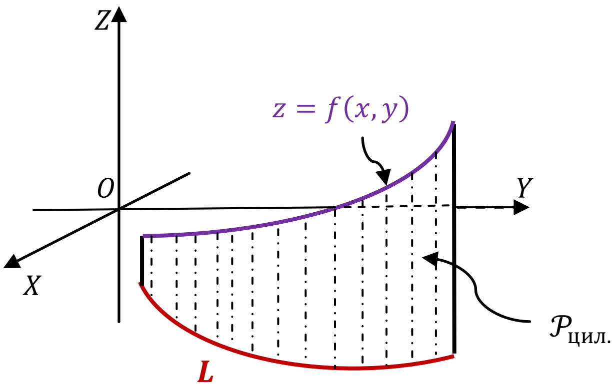


Рис. 2.4. **Площадь цилиндрической поверхности**

Механические приложения

Статические моменты плоской кривой относительно координатных осей OX и OY:

$$M_X = \int_L y \cdot \rho(x,y)dl, \qquad M_Y = \int_L x \cdot \rho(x,y)dl.$$

Статические моменты пространственной кривой относительно координатных плоскостей OXY, OXZ и OYZ:

$$M_{XY} = \int_L z \cdot \rho(x,y,z)dl, \quad M_{XZ} = \int_L y \cdot \rho(x,y,z)dl, \quad M_{YZ} = \int_L x \cdot \rho(x,y,z)dl.$$

Координаты центра тяжести $C(x_0,y_0)$ - плоской кривой L и $C(x_0,y_0,z_0)$ - пространственной кривой:

$$x_0 = \frac{1}{m} \cdot M_Y, \quad y_0 = \frac{1}{m} \cdot M_X$$ - для плоской кривой;

$$x_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{YZ}, \quad y_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{XZ}, \quad z_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{XY}$$ - для пространственной кривой.

Моменты инерции плоской кривой L относительно осей координат OX, OY и точки O - начала координат:

$$I_X = \int_L y^2 \cdot \rho(x,y)dl, \quad I_Y = \int_L x^2 \cdot \rho(x,y)dl, \quad I_0 = I_X + I_Y = \int_L (x^2+y^2) \cdot \rho(x,y)dl.$$

Моменты инерции пространственной кривой L относительно координатных плоскостей OXY, OXZ и OYZ, относительно координатных осей OX, OY и OZ и относительно точки O - начала координат:

$$I_{XY} = \int_L z^2 \cdot \rho(x,y,z)dl, \quad I_{XZ} = \int_L y^2 \cdot \rho(x,y,z)dl, \quad I_{YZ} = \int_L x^2 \cdot \rho(x,y,z)dl,$$

$$I_X = \int_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dl, \quad I_Y = \int_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dl, \quad I_Z = \int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dl,$$

$$I_0 = I_{XY} + I_{XZ} + I_{YZ} = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z) = \int_L (x^2+y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)dl.$$

Пример 2.4.

Найти длину одного витка винтовой линии L: $\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t, \\ z = k \cdot t \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$ (рис. 2.5).

Решение.

Применим формулу: $|L| = \int_L \ 1 \cdot dl$,

где $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt$.

Здесь $x_t' = -R \cdot \sin t,\ \ y_t' = R \cdot \cos t,\ \ z_t' = k$,

$dl = \sqrt{R^2 + k^2}\, dt$.

В результате получим:

$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2}\, dt = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 + k^2}$.

Ответ: $|L| = 2\pi \cdot \sqrt{R^2 + k^2}$.

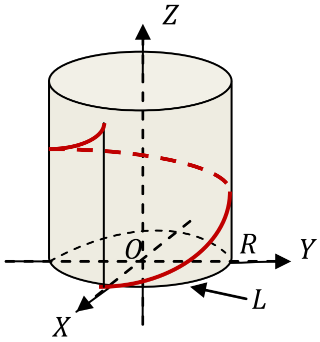


Рис. 2.5. **К Примеру 2.4**

Пример 2.5.

Найти площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания R и высотой H.

Решение.

Введем систему координат $OXYZ$ так, чтобы основание цилиндра лежало в плоскости OXY, начало координат O совпадало с центром круга, а ось OZ была параллельна образующей цилиндра (рис. 2.6).

Направляющей L цилиндрической поверхности будет окружность радиуса R.

Ограничивающая сверху кривая имеет уравнение:

$z = f(x, y) = H$, где $(x, y) \in L$.

Следовательно, имеем:

$S(\mathcal{P}_{цил.}) = \int_L \ f(x, y) dl = \int_L \ H dl = H \cdot \int_L \ dl = H \cdot |L| = 2\pi R \cdot H$.

Ответ: $S_{бок.\ цил.} = 2\pi R \cdot H$.

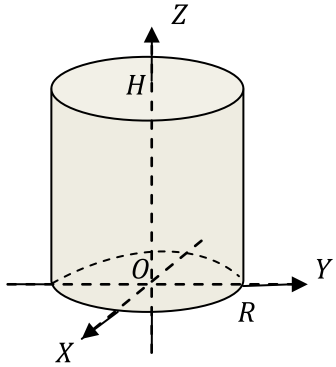


Рис. 2.6. **К Примеру 2.5**

Пример 2.6.

Найти площадь той части боковой поверхности прямого кругового цилиндра, которая лежит «под» винтовой линией:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t\ ,\ t \in [0; 2\pi] \\ z = k \cdot t \end{cases} \text{(рис. 2.7).}$$

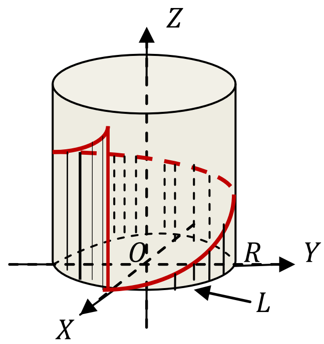


Рис. 2.7. **К Примеру 2.6**

Решение.

$$S(\mathcal{P}_{цил.}) = \int_L \ f(x, y) dl = \begin{bmatrix} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \\ z = k \cdot t \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} k \cdot t \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} k \cdot t \sqrt{(-R \cdot \sin t)^2 + (R \cdot \cos t)^2}\, dt = k \cdot R \int_0^{2\pi} t\, dt = kR \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 kR.$$

Ответ: $S(\mathcal{P}_{цил.}) = 2\pi^2 kR$.

Пример 2.7.

Найти массу эллипса $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, если плотность массы в точке $M(x, y)$ равна $\rho(x, y) = |y|$.

Решение.

Учитывая симметричность эллипса относительно осей координат (рис. 2.8) и четность функции $|y|$, можно

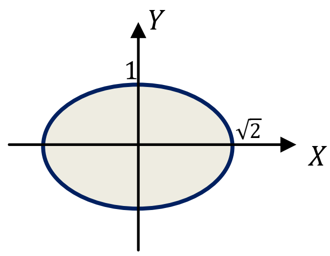


Рис. 2.8. **К Примеру 2.7**

найти массу четверти эллипса и умножить результат на 4.

Эллипс можно задать параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0; 2\pi].$$

Применим формулу для вычисления массы:

$$m_L = \int_L \rho(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Вычислим массу первой четверти эллипса:

$$\frac{1}{4}m_L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \cos^2 t}\ d(\cos t) = \int_0^1 \sqrt{2 - u^2}\, du =$$

$$= \left(\arcsin\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}u \cdot \sqrt{2 - u^2}\right)\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ m_L = 4\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \pi + 2.$$

Ответ: $m_L = \pi + 2$.

Пример 2.8.

Найти координаты центра масс контура однородного сферического треугольника, расположенного в первом октанте (рис. 2.9): $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$.

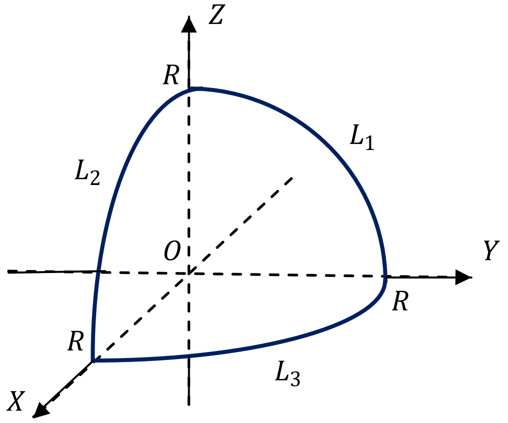


Рис. 2.9. **К Примеру 2.8**

Решение.

Пусть $C(x_0, y_0, z_0)$ - центр масс заданного контура. Применим формулы:

$$x_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{YZ} = \frac{1}{m} \cdot \int_L x \cdot \rho(x,y,z)dl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{XZ} = \frac{1}{m} \cdot \int_L y \cdot \rho(x,y,z)dl,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \cdot M_{XY} = \frac{1}{m} \cdot \int_L z \cdot \rho(x,y,z)dl,$$

$$m = \int_L \rho(x,y,z)dl.$$

Учитывая, что контур – однородный, т.е. $\rho(x,y,z) = \rho = const$, получаем:

$$m = \int_L \rho dl = \rho\cdot\int_L dl = \rho\cdot|L|,$$

$$x_0 = \frac{1}{m}\cdot\int_L x \cdot \rho dl = \frac{1}{\rho\cdot|L|}\cdot\rho\int_L xdl = \frac{1}{|L|}\cdot\int_L xdl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\cdot\int_L y \cdot \rho dl = \frac{1}{\rho\cdot|L|}\cdot\rho\int_L ydl = \frac{1}{|L|}\cdot\int_L ydl,$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\cdot\int_L z \cdot \rho dl = \frac{1}{\rho\cdot|L|}\cdot\rho\int_L zdl = \frac{1}{|L|}\cdot\int_L zdl.$$

Вычислим $\int_L xdl$. Разобьем контур L на три кривые: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, где $L_1\colon \begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}$, $L_2\colon \begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases}$, $L_3\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ - четверти окружностей радиуса R; следовательно: $|L| = 3\cdot\frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{|L|} = \frac{2}{3\pi R}$.

По свойству аддитивности имеем: $\int_L xdl = \int_{L_1} xdl + \int_{L_2} xdl + \int_{L_3} xdl.$

$$\int_{L_1} xdl = \int_{L_1} 0dl = 0;$$

$$\int_{L_2} xdl = \left[\begin{matrix} \begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ z = R \cdot \sin t \end{cases}, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = R \cdot dt \end{matrix}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \cos t \cdot R\, dt = R^2\cdot\sin t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2;$$

$$\int_{L_3} xdl = \left[\begin{matrix} \begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt = R \cdot dt \end{matrix}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \cos t \cdot R\, dt = R^2 \cdot \sin t \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2;$$

$$\int_L xdl = 0 + R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Аналогично получим: $\int_L ydl = 2R^2$ и $\int_L zdl = 2R^2$. Следовательно:

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{|L|} \cdot \int_L xdl = \frac{1}{|L|} \cdot \int_L ydl = \frac{1}{|L|} \cdot \int_L zdl = \frac{2}{3\pi R} \cdot 2R^2 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Ответ: $C\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$ - центр масс.

2.4. Криволинейный интеграл 2 рода

Рассмотрим вначале задачу, которая приводит к понятию криволинейного интеграла 2 рода.

2.4.1. Задача о вычислении работы переменной силы вдоль кривой

Предположим, что материальная точка M перемещается вдоль кривой L под действием переменной силы $\vec{F}$ (рис. 2.10).

Требуется найти работу $\mathcal{A}$, которую совершает сила $\vec{F}$ при перемещении точки из пункта A в пункт B.

Частный случай этой задачи рассмотрен в работе [4], 14.5.

Из курса физики известно, что если сила $\vec{F}$ постоянна (по величине и направлению), а линия $L = [AB]$ - отрезок прямой, то работа $\mathcal{A}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$\mathcal{A} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\overrightarrow{AB}$.

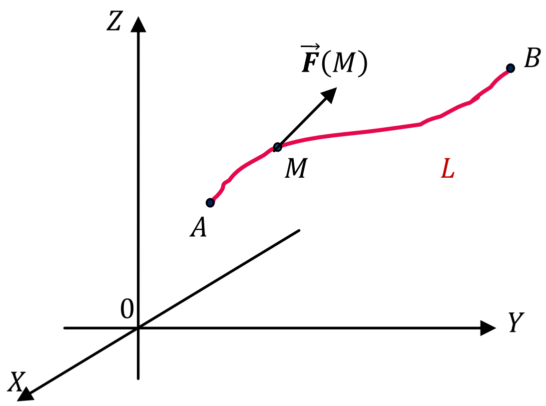


Рис. 2.10. **Перемещение точки вдоль кривой**

Для решения задачи в общем случае разобьем кривую L на частичные дуги точками $A_0 \equiv A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \equiv B$:

$$L = \breve{L}_1 \cup \breve{L}_2 \cup \dots \cup \breve{L}_n, \text{ где } \breve{L}_k \text{ - дуга } (A_{k-1}A_k),\ k = 1 \div n.$$

Далее на каждой частичной дуге выберем произвольную точку $M_k \in \breve{L}_k$, $k = 1 \div n$ (рис. 2.11).

Если частичные дуги имеют достаточно малые размеры, то вектор силы $\vec{F}$ на этом участке можно считать постоянным и равным $\vec{F}(M_k)$, а дугу $(A_{k-1}A_k)$ - можно считать отрезком прямой.

Тогда работа силы $\vec{F}$ на этом участке приближенно равна: $\mathcal{A}_k \approx \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}$, где $\overrightarrow{\Delta r_k} = \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, $k = 1 \div n$.

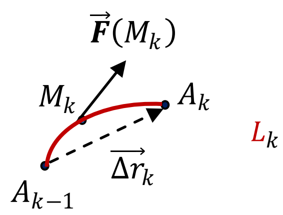


Рис. 2.11. **Вычисление работы на частичных дугах**

Вся работа $\mathcal{A}$ равна сумме работ $\mathcal{A}_k$ на частичных участках:

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \approx \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше размеры частичных дуг или модули векторов $\overrightarrow{\Delta r_k}$, $k = 1 \div n$; другими словами, чем меньше ранг разбиения $\lambda = max_{\,1\le k\le n} \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|$, тем точнее эта приближенная формула.

В пределе при $\lambda \to 0$ получим точное равенство:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{F}}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}.$$

2.4.2. Понятие криволинейного интеграла 2 рода

Пусть $L = \breve{AB}$ - *простая* кривая на плоскости или в пространстве, на которой задана вектор - функция $\vec{F}(M)$, $M \in L$.

Выберем направление на кривой, идущее от точки A до точки B. Выполним следующие действия.

1. Разбиение кривой L на частичные дуги точками $A_0 \equiv A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \equiv B$:
   $L = \breve{L}_1 \cup \breve{L}_2 \cup \dots \cup \breve{L}_n$ (рис. 2.12),
   где $\breve{L}_k$ - дуга $(A_{k-1}A_k)$, $k = 1 \div n$.
2. Выбор промежуточных точек:
   $M_k \in \breve{L}_k$, $k = 1 \div n$.
3. Вычисление скалярных произведений векторов:
   $$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k},\ \ k = 1 \div n,$$
   где $\overrightarrow{\Delta r_k} = \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ – вектор, соединяющий начало и конец дуги $(A_{k-1}A_k)$, и вычисление интегральной суммы:
   $$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{F}}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}.$$

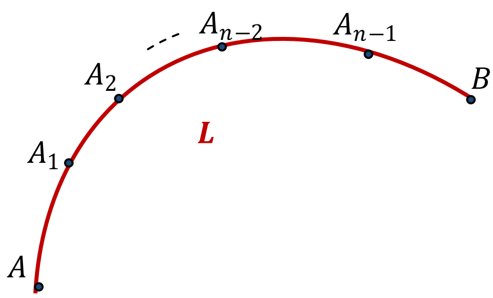


Рис. 2.12. **Разбиение кривой *L***

Пусть $\lambda = max_{\,1\le k\le n} \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|$ - ранг разбиения.

Определение 2.3.

Число I называется пределом интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L с рангом разбиения $\lambda < \delta$ и при любом выборе промежуточных точек $\{M_k\}_{k=1}^{n}$ выполняется неравенство:

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon.$$

Запись: $I = lim_{\lambda \to 0}\ \sigma_n$ - означает, что при $\lambda \to 0$ этот предел существует, он не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек, и он равен числу I.

Определение 2.4.

Конечный предел интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$ называется *криволинейным интегралом* 2 рода (или криволинейным интегралом *по координатам*) от вектор-функции $\vec{F}(M)$ вдоль кривой L.

Обозначение: $\int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr}$. Следовательно, по определению имеем:

$$\boxed{\int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{F}}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}}.$$

Запишем криволинейный интеграл 2 рода в координатной форме.

В случае пространственной кривой вектор-функция $\vec{F}(M)$ задается тремя координатными функциями:

$$\vec{F}(M) = P(x,y,z)\cdot\vec{\boldsymbol{i}} + Q(x,y,z)\cdot\vec{\boldsymbol{j}} + R(x,y,z)\cdot\vec{\boldsymbol{k}}.$$

Пусть $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор точки $M(x,y,z) \in L$, тогда имеем:

$$\overrightarrow{\Delta r_k} = \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix} = \Delta x_k \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + \Delta y_k \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + \Delta z_k \cdot \vec{\boldsymbol{k}} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + dy \cdot \vec{\boldsymbol{j}} + dz \cdot \vec{\boldsymbol{k}},$$

$$\vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

В этом случае криволинейный интеграл 2 рода запишется в виде:

$$\int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

В случае плоской кривой получим:

$$\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y) \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + Q(x,y) \cdot \vec{\boldsymbol{j}}, \quad \overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dx \cdot \vec{\boldsymbol{i}} + dy \cdot \vec{\boldsymbol{j}},$$

$$\vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

$$\int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Таким образом, согласно определению имеем:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \{P(x_k,y_k,z_k)\Delta x_k + Q(x_k,y_k,z_k)\Delta y_k + R(x_k,y_k,z_k)\Delta z_k\};$$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \{P(x_k,y_k)\Delta x_k + Q(x_k,y_k)\Delta y_k\}.$$

Вектор-функция $\vec{F}(M)$, для которой существует криволинейный интеграл 2 рода, называется *интегрируемой* вдоль кривой L.

Пример 2.9.

$$\int_L \vec{0} \cdot \overrightarrow{dr} = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{0} \cdot \overrightarrow{\Delta r_k} = \lim_{\lambda \to 0} 0 = 0 \Rightarrow \int_L \vec{0} \cdot \overrightarrow{dr} = 0,$$

т.е. криволинейный интеграл 2 рода от нулевой вектор-функции равен нулю.

<u>Физический смысл</u> криволинейного интеграла 2 рода.

Криволинейный интеграл 2 рода от вектор-функции $\vec{F}(M)$ вдоль кривой L равен работе $\mathcal{A}$, совершаемой силой $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L:

$$\mathcal{A} = \int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr}.$$

Пример 2.10.

Найти работу $\mathcal{A}$ силы $\vec{F}(M) = R(x,y) \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$ вдоль плоской кривой L, лежащей в плоскости OXY (рис. 2.13).

Решение.

$$\mathcal{A} = \int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k}.$$

Здесь вектор силы ортогонален вектору перемещения:

$$\vec{F}(M_k) \perp \overrightarrow{\Delta r_k} \Rightarrow \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{\Delta r_k} = 0, \; k = 1 \div n.$$

Следовательно, имеем:

$$\mathcal{A} = lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 0 = \lim_{\lambda \to 0} 0 = 0.$$

Ответ: $\mathcal{A} = 0$.

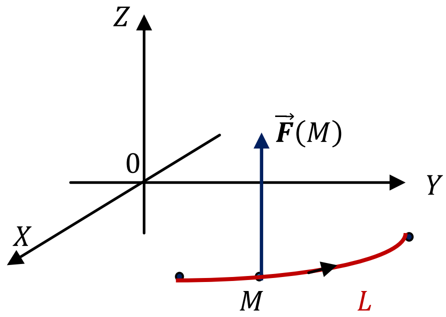


Рис. 2.13. **К Примеру 2.10**

Интегрируемость вектор-функции вдоль кривой и существование криволинейного интеграла 2 рода от вектор-функции гарантированы следующими условиями.

Теорема 2.5 (Достаточные условия интегрируемости).

Пусть L – простая гладкая кривая. Если вектор-функция $\vec{F}(M)$ - непрерывна на L (т.е. непрерывны все ее координатные функции), то она интегрируема вдоль этой кривой.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [1].

2.4.3. Свойства криволинейного интеграла 2 рода

Пусть вектор-функции $\vec{F}(M)$ и $\vec{G}(M)$ - интегрируемы вдоль кривой L. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Антисимметричность.

При изменении направления кривой L криволинейный интеграл 2 рода меняет знак: $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$

2. Линейность.

а) постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла 2 рода:

$$\int_L \left(C\cdot\vec{F}(M)\right)\cdot\overrightarrow{dr} = C\cdot\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr},\quad C = const;$$

б) криволинейный интеграл 2 рода от суммы вектор-функций равен сумме криволинейных интегралов 2 рода от этих вектор-функций:

$$\int_L \left(\vec{F}(M)+\vec{G}(M)\right)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + \int_L \vec{G}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

Свойство линейности можно записать в следующем виде:

$$\int_L \left(C_1\cdot\vec{F}(M)+C_2\cdot\vec{G}(M)\right)\cdot\overrightarrow{dr} = C_1\cdot\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + C_2\cdot\int_L \vec{G}(M)\cdot\overrightarrow{dr}\quad \forall\, C_1, C_2 = const.$$

3. Аддитивность.

Если кривая L разбита на две дуги, то криволинейный интеграл 2 рода по всей кривой равен сумме криволинейных интегралов 2 рода по каждой из этих дуг:

$$\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{L_1} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + \int_{L_2} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr},$$

где $L = L_1 \cup L_2$ и $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Доказательство.

1. $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}(M_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k},$

$\int_{\overset{\frown}{BA}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}(M_k)\cdot\overrightarrow{A_kA_{k-1}};$ так как $\overrightarrow{A_{k-1}A_k} = -\overrightarrow{A_kA_{k-1}},$

$k = 1 \div n$, то получаем: $\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$

2. $\int_L \left(C_1\cdot\vec{F}(M)+C_2\cdot\vec{G}(M)\right)\cdot\overrightarrow{dr} = lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(C_1\cdot\vec{F}(M_k)+C_2\cdot\vec{G}(M_k)\right)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} =$

$$= lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(C_1\cdot\vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} + C_2\cdot\vec{G}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k}\right) =$$

$$= lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} C_1\cdot\vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} + \sum_{k=1}^{n} C_2\cdot\vec{G}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k}\right) =$$

$$= lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} C_1\cdot\vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} + lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} C_2\cdot\vec{G}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} =$$

$$= C_1\cdot lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} + C_2\cdot lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \vec{G}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} =$$

$$= C_1\cdot\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + C_2\cdot\int_L \vec{G}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

3. Рассмотрим такое разбиение кривой $L = \breve{L}_1 \cup \breve{L}_2 \cup \ldots \cup \breve{L}_n$ на частичные дуги, чтобы точка пересечения L_1 и L_2 оказалась бы одной из точек разбиения A_k. Введем обозначения интегральных сумм:

$$\sigma(L) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} \text{ - по кривой } L;$$

$$\sigma^{(1)}(L_1) = \sum_{k=1}^{m} \vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} \text{ - по дуге } L_1;$$

$$\sigma^{(2)}(L_2) = \sum_{k=m+1}^{n} \vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k} \text{ - по дуге } L_2.$$

Тогда имеем: $\sigma(L) = \sigma^{(1)}(L_1) + \sigma^{(2)}(L_2)$.

Переходя к пределу в этом равенстве при $\lambda \to 0$, получим:

$$\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{L_1} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + \int_{L_2} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

2.4.4. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

Вычисление криволинейного интеграла 2 рода, как и криволинейного интеграла 1 рода, сводится к вычислению определенного интеграла.

Теорема 2.6.

Пусть простая гладкая кривая $L = \breve{AB}$ - задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \; t \in [\alpha;\beta], \\ z = z(t) \end{cases}$ где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - непрерывно-дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $A\big(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)\big)$, $B\big(x(\beta), y(\beta), z(\beta)\big)$.

Пусть вектор-функция $\vec{F}(M) = P(x,y,z)\cdot\vec{i} + Q(x,y,z)\cdot\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$ - непрерывна на кривой L, т.е. непрерывны функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ при $M(x,y,z) \in L$.

Тогда справедливо равенство:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ = \int_\alpha^\beta \{P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\}\,dt\end{gathered}}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [1].

В случае плоской кривой $L = \breve{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$ – получаем формулу:

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\}\,dt}.$$

Если плоская кривая $L = \breve{AB}$ - задана явным уравнением: $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, или $x = \varphi(y)$, $y \in [c;d]$ - то формула принимает вид:

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\}\,dx}, \text{ или}$$

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \{P(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y) + Q(\varphi(y),y)\}\,dy}.$$

Пример 2.11.

Вычислить криволинейный интеграл 2 рода:

$$I = \int_L (x+y)\,dx + 2z\,dy + xy\,dz, \text{ где } L: \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, \; t \in [0;1]. \\ z = t \end{cases}$$

Решение.

$$I = \int_L (x+y)\,dx + 2z\,dy + xy\,dz = \int_0^1 \{(t^3+t^2)\cdot 3t^2dt + 2t\cdot 2t\,dt + t^5\cdot dt\} =$$

$$= \int_0^1 (4t^5 + 3t^4 + 4t^2)\,dt = \left(\frac{2t^6}{3} + \frac{3t^5}{5} + \frac{4t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\frac{3}{5}.$$

Ответ: $I = 2\frac{3}{5}$.

Пример 2.12.

Вычислить криволинейный интеграл 2 рода:

$I = \int_L 2xy\,dx - x^2dy$ - вдоль различных кривых, соединяющих точки $O(0;0)$ и $A(2;1)$:

а) прямая $[OA]$,

б) парабола с осью OY,

в) ломаная $[OBA]$, где $B(2;0)$ (рис. 2.14).

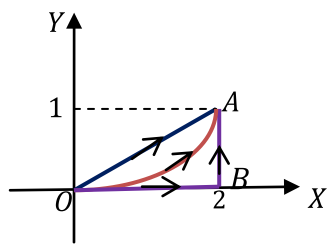


Рис. 2.14. **К Примеру 2.12**

Решение.

а) Отрезок прямой линии $[OA]$ задается уравнением: $y=\frac{1}{2}x,\ \ x\in[0;2]$.

Следовательно, имеем:

$$I=\int_L\ (2xy\,dx-x^2dy)=\int_0^2\left(2x\cdot\frac{1}{2}x\,dx-x^2\cdot\frac{1}{2}dx\right)=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=1\frac{1}{3}.$$

б) Дуга параболы с осью OY задается уравнением: $y=\frac{1}{4}x^2,\ \ x\in[0;2]$. Значит:

$$I=\int_L\ (2xy\,dx-x^2dy)=\int_0^2\left(2x\cdot\frac{1}{4}x^2dx-x^2\cdot\frac{1}{2}xdx\right)=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^3\right)dx=\int_0^2 0\,dx=0.$$

в) Ломаная линия $[OBA]$ разбивается на два отрезка:

$L=L_1\cup L_2$, где $L_1=[OB]$: $\begin{cases}0\le x\le 2\\ y=0\end{cases}$, $L_2=[BA]$: $\begin{cases}x=2\\ 0\le y\le 1\end{cases}$. Следовательно:

$$I=I_1+I_2;\quad I_1=\int_{L_1}(2xy\,dx-x^2dy)=\int_0^2\big(2x\cdot 0\,dx-x^2\cdot d(0)\big)=\int_0^2 0\,dx=0;$$

$$I_2=\int_{L_2}(2xy\,dx-x^2dy)=\int_0^1(4y\,d(2)-4\,dy)=\int_0^1(-4\,dy)=-4\int_0^1 dy=-4y\,\Big|_0^1=-4;$$

$$I=I_1+I_2=0-4=-4.$$

Ответ: а) $I=1\frac{1}{3}$; б) $I=0$; в) $I=-4$.

Замечание 2.4.

Если линия L - прямолинейный отрезок, параллельный одной из осей координат, то вычисление криволинейного интеграла 2 рода упрощается.

Действительно, пусть $I=\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Тогда имеем:

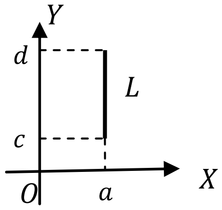


Рис. 2.15. $\boldsymbol{L\parallel OY}$

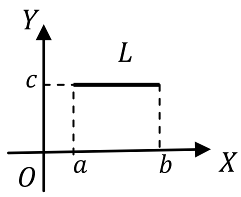


Рис. 2.16. $\boldsymbol{L\parallel OX}$

а) если $L\parallel OY$, т.е. L: $\begin{cases}x=a\\ c\le y\le d\end{cases}$ (рис. 2.15), то $dx=d(a)=0$ и

$$I=\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\ Q(x,y)dy=\int_c^d Q(a,y)\,dy;$$

б) если $L\parallel OX$, т.е. L: $\begin{cases}y=c\\ a\le x\le b\end{cases}$ (рис. 2.16), то $dy=d(c)=0$ и

$$I=\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\ P(x,y)dx=\int_a^b P(x,c)\,dx.$$

2.4.4. Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода

Сравним определения криволинейных интегралов 1 и 2 рода.

$\int_L\ f(M)dl=lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(M_k)\cdot\Delta l_k$ - криволинейный интеграл 1 рода;

$\int_L\ \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}=lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \boldsymbol{\vec{F}}(M_k)\cdot\overrightarrow{\Delta r_k}$ - криволинейный интеграл 2 рода.

Здесь Δl_k - длина частичной дуги, а $\overrightarrow{\Delta r_k}$ - вектор, соединяющий концы частичной дуги (рис. 2.17).

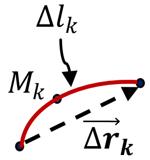


Рис. 2.17. **Связь между** $\boldsymbol{\Delta l_k}$ **и** $\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k}}}$

Очевидно, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\Delta l_k}{|\overrightarrow{\Delta r_k}|}=1$, т.е. $\Delta l_k\sim\left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|$ при $\lambda\to 0$.

Следовательно, имеем:

$lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot \Delta l_k = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right| \cdot \frac{\Delta l_k}{\left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|} = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|.$

При $\lambda \to 0$ направление вектора $\overrightarrow{\Delta r_k}$ стремится к направлению касательной к кривой в точке M_k.

Обозначим через α, β, γ – направляющие углы касательной в точке M_k. Тогда можно записать:

$\Delta x_k = \text{Пр}_{OX}\overrightarrow{\Delta r_k} = \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|\cdot cos\,\alpha$, $\Delta y_k = \text{Пр}_{OY}\overrightarrow{\Delta r_k} = \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|\cdot cos\,\beta$, $\Delta z_k = \text{Пр}_{OZ}\overrightarrow{\Delta r_k} = \left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|\cdot cos\,\gamma$.

Далее имеем:

$$\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n}\{P(x_k,y_k,z_k)\Delta x_k + Q(x_k,y_k,z_k)\Delta y_k + R(x_k,y_k,z_k)\Delta z_k\} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n}\{P(x_k,y_k,z_k)\cdot cos\,\alpha + Q(x_k,y_k,z_k)\cdot cos\,\beta + R(x_k,y_k,z_k)\cdot cos\,\gamma\}\left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right|.$$

Введем обозначение: $f(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot cos\,\alpha + Q(x,y,z)\cdot cos\,\beta + R(x,y,z)\cdot cos\,\gamma$.

Заметим, что направляющие косинусы: $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ - также являются функциями от переменных (x,y,z).

Далее получим: $\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\cdot\left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right| =$

$= lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot\left|\overrightarrow{\Delta r_k}\right| = lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot\Delta l_k = \int_L f(M)dl.$

Таким образом, имеем формулу, связывающую криволинейные интегралы 1 и 2 рода:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_L \{P(x,y,z)\cdot cos\,\alpha + Q(x,y,z)\cdot cos\,\beta + R(x,y,z)\cdot cos\,\gamma\}\,dl.$$

В случае плоской кривой получим:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \{P(x,y)\cdot cos\,\alpha + Q(x,y)\cdot sin\,\alpha\}\,dl.$$

2.5. Криволинейный интеграл 2 рода по замкнутому контуру

Рассмотрим криволинейный интеграл 2 рода $\int_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}$ по замкнутому контуру L, т.е. вдоль простой кривой, у которой начало и конец совпадают. Для таких интегралов принято следующее обозначение:

$$\oint_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

При этом должно быть указано направление движения по этому контуру.

Если направление на этой кривой выбрано, то зафиксировав начальную точку, например, точку A, имеем по определению (рис. 2.18):

$$\oint_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{(AmBnA)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

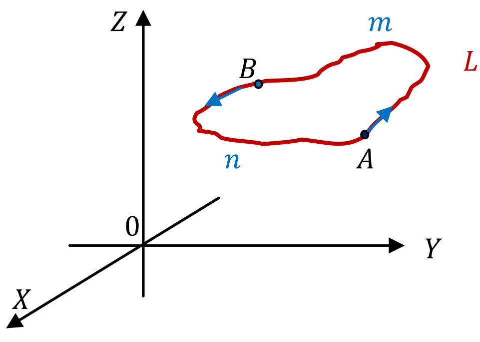


Рис. 2.18. **Замкнутый контур**

Заметим, что значение интеграла не зависит от выбора начальной точки. Действительно, если взять точку B в качестве начальной точки, то получим:

$$\oint_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{(BnAmB)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{(BnA)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + \int_{(AmB)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} =$$

$$= \int_{(AmB)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} + \int_{(BnA)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{(AmBnA)} \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_L \vec{F}(M)\cdot\overrightarrow{dr}.$$

Направление движения по пространственной кривой L в каждом конкретном случае приходится указывать особо.

В случае плоской кривой различают *положительное* и *отрицательное* направления обхода контура.

Положительным считается такое направление, при котором ближайшая часть области остается *слева* от направления движения (рис. 2.19). Обратное направление при этом считается *отрицательным*.

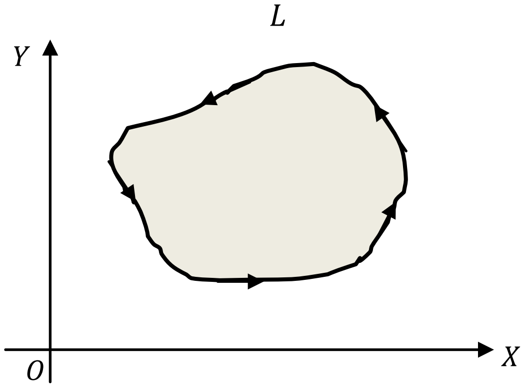


Рис. 2.19. **Положительное направление обхода контура**

В дальнейшем запись вида:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ -}$$

будет означать криволинейный интеграл 2 рода по замкнутому контуру на плоскости в положительном направлении.

2.5.1. Связь между криволинейным интегралом 2 рода и двойным интегралом

Рассмотрим криволинейный интеграл 2 рода:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где L - замкнутый контур на плоскости.

1. Предположим, что контур L ограничивает на плоскости область D, правильную в направлении оси OY (см. **1.3.1**).

В этом случае контур L состоит из отрезков $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, параллельных оси OY и кривых:

$\overset{\frown}{A_1B_1} = \{M(x,y) \in R^2\colon\ y = \varphi_1(x),\ x \in [a;b]\}$,

$\overset{\frown}{B_2A_2} = \{M(x,y) \in R^2\colon\ y = \varphi_2(x),\ x \in [a;b]\}$

(рис. 2.20).

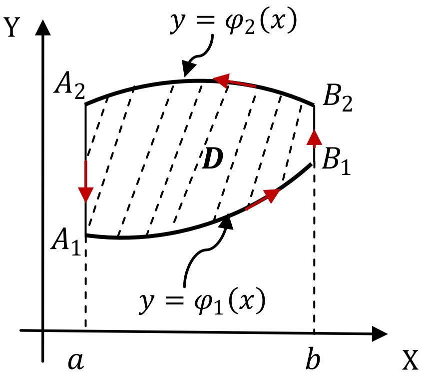


Рис. 2.20. **Контур области, правильной в направлении оси OY**

Пусть функция $P(x,y)$ непрерывна в области D и пусть в этой области существует и непрерывна частная производная $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Установим связь между криволинейным интегралом 2 рода $\oint_L P(x,y)dx$ и двойным интегралом $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy$.

Выразим двойной интеграл по правильной области через повторный интеграл:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right)dx.$$

Учитывая, что $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)$, получим:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \big\{P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\big\}dx.$$

С другой стороны, по свойству аддитивности криволинейного интеграла имеем:

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int_{[B_1B_2]} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{[A_2A_1]} P(x,y)dx.$$

Так как отрезки $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ параллельны оси OY, то

$$\int_{[B_1B_2]} P(x,y)dx = \int_{[A_2A_1]} P(x,y)dx = 0$$ (**см.** *Замечание 2.4*).

Следовательно, имеем:

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{\widetilde{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int_{\widetilde{B_2A_2}} P(x,y)dx = \int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)\,dx +$$
$$+\int_b^a P\big(x,\varphi_2(x)\big)\,dx = \int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)\,dx - \int_a^b P\big(x,\varphi_2(x)\big)\,dx =$$
$$= -\int_a^b \big\{P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\big\}\,dx.$$

Сравнивая найденные выражения, получаем равенство:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy}.$$

Полученная формула верна и в случае, когда область D, ограниченная контуром L, не является правильной относительно оси OY, но ее можно разбить на конечное число правильных областей прямыми, параллельными оси OY. Покажем это.

Пусть, например, область D разбита на три области: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ прямой $[ABC]$ (рис. 2.21).

Тогда для каждой из областей D_1, D_2, D_3 верна формула:

$$\oint_{L_i} P(x,y)dx = -\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy,\ i = 1 \div 3.$$

При этом контур L_1 состоит из части контура L и отрезка прямой $[CBA]$; контур L_2 состоит из части контура L и отрезка прямой $[BC]$; контур L_3 состоит из части контура L и отрезка прямой $[AB]$.

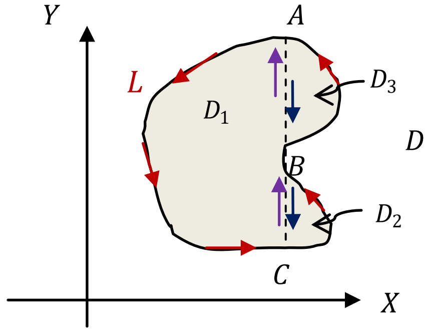


Рис. 2.21. **Разбиение неправильной области на правильные подобласти**

Складывая эти формулы, получим в правой части равенства:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy,$$

а в левой части: $\int_{L'} P(x,y)dx$, где $L' = L \cup [CBA] \cup [BC] \cup [AB]$.

Из свойств *аддитивности* и *антисимметричности* криволинейного интеграла 2 рода имеем:

$$\int_{L'} P(x,y)dx = \oint_L P(x,y)dx + \int_{[CBA]} P(x,y)dx + \int_{[BC]} P(x,y)dx + \int_{[AB]} P(x,y)dx =$$
$$= \oint_L P(x,y)dx + \int_{[CB]} P(x,y)dx + \int_{[BA]} P(x,y)dx - \int_{[CB]} P(x,y)dx - \int_{[BA]} P(x,y)dx =$$
$$= \oint_L P(x,y)dx.$$

Откуда и получаем нужную формулу:

$$\oint_L P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy.$$

2. Предположим теперь, что контур L ограничивает на плоскости область D, правильную в направлении оси OX (см. **1.3.1**).

В этом случае контур L состоит из отрезков $[A_1B_1]$, $[B_2A_2]$, параллельных оси OX и кривых:

$\widetilde{A_2A_1} = \{M(x,y) \in R^2\colon\ x = \varphi_1(y),\ y \in [c;d]\}$,
$\widetilde{B_1B_2} = \{M(x,y) \in R^2\colon\ x = \varphi_2(y),\ y \in [c;d]\}$
(рис. 2.22).

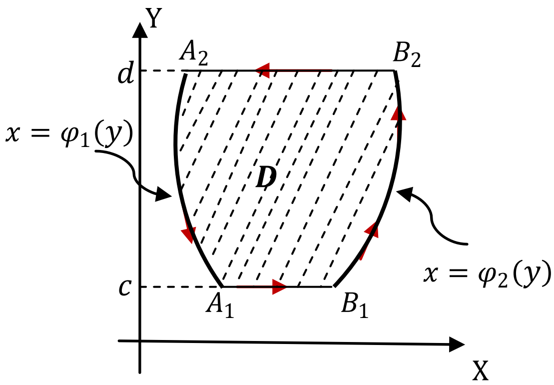


Рис. 2.22. **Контур области, правильной в направлении оси *OX***

Пусть функция $Q(x, y)$ непрерывна в области D и пусть в этой области существует и непрерывна частная производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Установим связь между криволинейным интегралом 2 рода $\oint_L Q(x, y)dy$ и двойным интегралом $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy$.

Выразим двойной интеграл по правильной области через повторный интеграл:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx\right) dy.$$

Учитывая, что $\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx = Q(x, y)\big|_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} = Q(\varphi_2(y), y) - Q(\varphi_1(y), y)$, получим:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy = \int_c^d \{Q(\varphi_2(y), y) - Q(\varphi_1(y), y)\}\, dy.$$

С другой стороны, по свойству аддитивности криволинейного интеграла имеем:

$$\oint_L Q(x, y)dy = \int_{\overline{A_2A_1}} Q(x, y)dy + \int_{[A_1B_1]} Q(x, y)dy + \int_{\overline{B_1B_2}} Q(x, y)dy + \int_{[B_2A_2]} Q(x, y)dy.$$

Так как отрезки $[A_1B_1]$, $[B_2A_2]$ параллельны оси OX, то

$\int_{[A_1B_1]} Q(x, y)dy = \int_{[B_2A_2]} Q(x, y)dy = 0$ (**см.** *Замечание 2.4*).

Следовательно, имеем:

$$\oint_L Q(x, y)dx = \int_{\overline{A_2A_1}} Q(x, y)dy + \int_{\overline{B_1B_2}} Q(x, y)dy = \int_d^c Q(\varphi_1(y), y)\, dy +$$
$$+ \int_c^d Q(\varphi_2(y), y)\, dy = -\int_c^d Q(\varphi_1(y), y)\, dy + \int_c^d Q(\varphi_2(y), y)\, dy =$$
$$= \int_c^d \{Q(\varphi_2(y), y) - Q(\varphi_1(y), y)\}\, dy.$$

Сравнивая найденные выражения, получаем равенство:

$$\boxed{\oint_L Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy}.$$

Полученная формула верна и в случае, когда область D, ограниченная контуром L, не является правильной относительно оси OX, но ее можно разбить на конечное число правильных областей прямыми, параллельными оси OX.

Доказательство аналогично приведенному выше доказательству для случая **1**.

2.5.2. Формула Грина

Выяснив связь между криволинейными интегралами 2 рода и двойными интегралами, докажем следующее утверждение.

Теорема 2.7.

Пусть область D, ограниченная контуром L, является правильной областью и в направлении оси OX, и в направлении оси OY.

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D и в этой области существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Тогда справедлива следующая формула (формула Грина):

$$\boxed{\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left\{\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right\} dxdy}.$$

Доказательство.

Так как область D является правильной в направлении осей OX и OY, то справедливы обе формулы:

$$\oint_L P(x, y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dxdy \quad \text{и} \quad \oint_L Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy.$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left\{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right\} dxdy.$$

Теорема доказана.

Замечание 2.5.

Формула Грина остается справедливой и в случае, когда область D, ограниченная контуром L, не является правильной относительно оси OX или OY, но ее можно разбить на конечное число правильных областей прямыми, параллельными осям OX и OY.

Пример 2.13.

Вычислить $\oint_L y^2dx + x^2dy$ двумя способами:

а) непосредственно, б) по формуле Грина, если L – контур, образованный линиями $y = x$ и $y = x^2$.

Решение.

Контур, состоящий из отрезка прямой $y = x$ и дуги параболы $y = x^2$, ограничивает область, изображенную на рисунке 2.23. Линии пересекаются в точках $O(0,0)$ и $A(1,1)$.

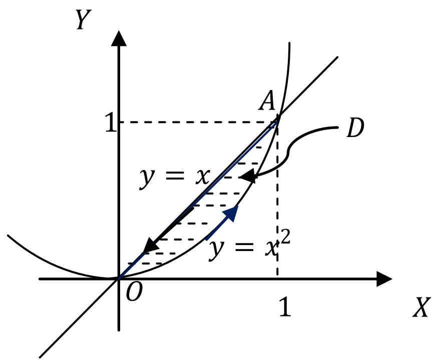


Рис. 2.23. **К Примеру 2.13**

а) $L = L_1 \cup L_2$, где L_1: $\begin{cases} y = x^2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$, L_2: $\begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$.

$$\oint_L y^2dx + x^2dy = \int_{L_1} y^2dx + x^2dy + \int_{L_2} y^2dx + x^2dy =$$

$$= \int_0^1 (x^4dx + x^2 \cdot 2xdx) + \int_1^0 (x^2dx + x^2dx) =$$

$$= \int_0^1 (x^4 + 2x^3)dx + \int_1^0 2x^2dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3}\Big|_1^0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

б) $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$;

$$\oint_L y^2dx + x^2dy = \iint_D (2x - 2y)dxdy = 2\iint_D (x - y)dxdy = 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x - y)\,dy\right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x\,dy - \int_{x^2}^x y\,dy\right) dx = 2\int_0^1 \left(x \cdot y\big|_{x^2}^x - \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^x\right) dx = 2\int_0^1 \left(x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 2\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{30}.$$

Ответ: $\frac{1}{30}$.

Из формулы Грина как следствие получаются формулы для вычисления площади фигуры, ограниченной заданным контуром.

Пусть $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 0$; тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ и

$$\oint_L ydx = \iint_D (0 - 1)dxdy = -\iint_D dxdy = -S(D) \Rightarrow S(D) = -\oint_L ydx.$$

Пусть $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$; тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ и

$$\oint_L xdy = \iint_D (1 - 0)dxdy = \iint_D dxdy = S(D) \Rightarrow S(D) = \oint_L xdy.$$

Если сложить полученные равенства, то получим: $2 \cdot S(D) = \oint_L (xdy - ydx)$.

Таким образом, имеем следующие формулы:

$$\boxed{S(D) = \oint_L xdy}, \quad \boxed{S(D) = -\oint_L ydx}, \quad \boxed{S(D) = \frac{1}{2} \cdot \oint_L (xdy - ydx)}.$$

Пример 2.14.

Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.24).

Решение.

Контур эллипса можно задать параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

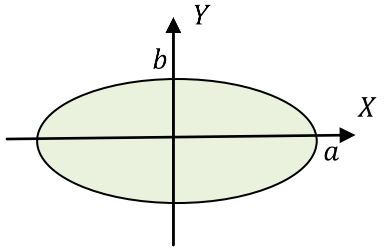


Рис. 2.24. **К Примеру 2.14**

Тогда по формуле: $S(D) = \frac{1}{2} \cdot \oint_L (xdy - ydx)$ – получим: $S(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{a \cdot \cos t \cdot d(b \cdot \sin t) - b \cdot \sin t \cdot d(a \cdot \cos t)\} =$

$= \frac{a \cdot b}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{a \cdot b}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{a \cdot b}{2} \cdot 2\pi = \pi ab.$

Ответ: $S_{элл.} = \pi ab.$

2.5.3. Многосвязные области

До сих пор мы рассматривали *связные* области D, ограниченные *простым* замкнутым контуром L. Такие области будем называть *односвязными* областями (рис. 2.25).

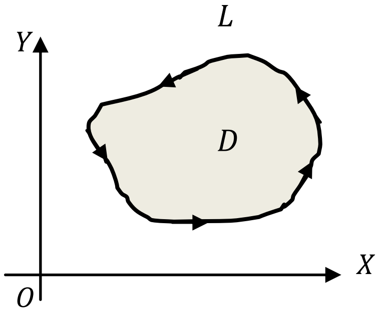


Рис. 2.25. **Односвязная область**

Если связная область ограничена двумя простыми замкнутыми контурами, не пересекающимися друг с другом (один из них лежит внутри другого), то такая область называется *двусвязной* областью.

Если связная область ограничена тремя простыми замкнутыми контурами, не пересекающимися друг с другом (два из них лежит внутри третьего), то такая область называется *трехсвязной* областью (рис. 2.26) и (рис. 2.27) и т.д.

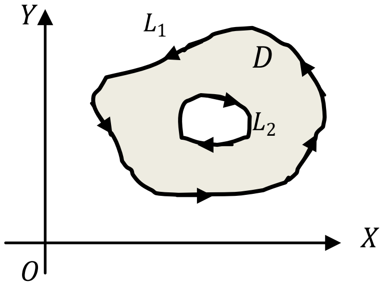


Рис. 2.26. **Двусвязная область**

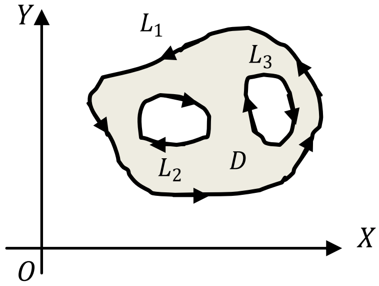


Рис. 2.27. **Трехсвязная область**

Определение 2.5.

Связная область называется $\boldsymbol{n}$-*связной* $(\boldsymbol{n} \geq 2)$ областью, если она ограничена $\boldsymbol{n}$ простыми замкнутыми контурами, не пересекающимися друг с другом, причем $(\boldsymbol{n} - 1)$ контуров из них лежат внутри одного контура.

«Неодносвязность» области D определяется наличием «дырок» внутри области D; причем эти «дырки» могут состоять даже из единственной точки. Например, круг с выколотым центром (рис. 2.28):

$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ - двусвязная область.

Односвязная область – это область «без дырок».

Формула Грина была получена для *односвязных* областей.

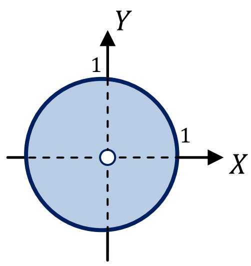


Рис. 2.28. **Пример двусвязной области**

Для многосвязных областей также справедлива формула Грина, но с некоторыми уточнениями.

Пусть D - $\boldsymbol{n}$-*связная* область, ограниченная контурами $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Введем обозначение: $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$.

Рассматривается интеграл:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_{L_1}\{\ldots\} + \oint_{L_2}\{\ldots\} + \ldots + \oint_{L_n}\{\ldots\},$$

причем направление интегрирования по каждому контуру L_k - положительное, $k = 1 \div n$.

Предполагается, что область D является правильной областью или ее можно разбить на конечное число правильных областей в направлении осей OX и OY прямыми, параллельными координатным осям.

Теорема 2.8 (формула Грина для многосвязных областей).

Пусть D - $\boldsymbol{n}$-*связная* область, ограниченная контурами $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области D и в этой области существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Тогда справедлива формула Грина:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left\{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right\} dxdy},$$

где $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$.

Доказательство.

Эту формулу докажем для случая *двусвязной* области (рис. 2.29); в общем случае доказательство проводится аналогично.

Выберем на внешнем контуре L_1 точки A_1, A_2, а на внутреннем контуре L_2 - точки B_1, B_2. Соединим точки A_1 и B_1, A_2 и B_2 дугами $\overset{\frown}{A_1B_1}$ и $\overset{\frown}{A_2B_2}$.

Область D разбивается на две области:

$$D = D_1 \cup D_2.$$

Область D_1 ограничена контуром $L_1^{'} = (A_2 n_1 A_1 B_1 n_2 B_2 A_2)$, область D_2 ограничена контуром $L_2^{'} = (A_1 m_1 A_2 B_2 m_2 B_1 A_1)$ (рис. 2.29).

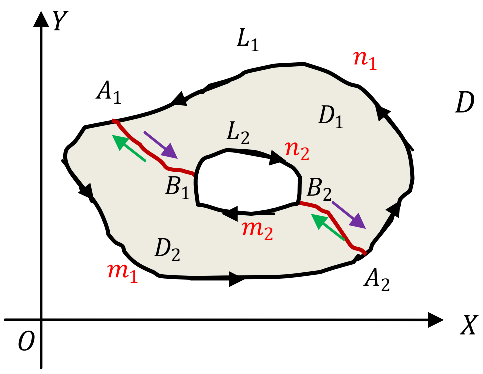


Рис. 2.29. **Иллюстрация к доказательству теоремы 2.8**

D_1 и D_2 - *односвязные* области, поэтому к ним можно применить формулу Грина:

$$\oint_{L_1^{'}}(Pdx + Qdy) = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \quad \oint_{L_2^{'}}(Pdx + Qdy) = \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Применяя свойство аддитивности двойного и криволинейного интеграла, получим:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \oint_{L_1^{'}}(Pdx + Qdy) + \oint_{L_2^{'}}(Pdx + Qdy) = \oint_{L_1^{'} \cup L_2^{'}}(Pdx + Qdy).$$

Преобразуем контур $L_1^{'} \cup L_2^{'}$:

$$L_1^{'} \cup L_2^{'} = L_1 \cup L_2 \cup \overset{\frown}{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_2A_2} \cup \overset{\frown}{B_1A_1} \cup \overset{\frown}{A_2B_2} = L \cup \overset{\frown}{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_1A_1} \cup \overset{\frown}{B_2A_2} \cup \overset{\frown}{A_2B_2}.$$

Далее используем свойства аддитивности и антисимметричности криволинейного интеграла 2 рода. Интегралы по дугам $\overset{\frown}{A_1B_1}$ и $\overset{\frown}{B_1A_1}$, а также $\overset{\frown}{A_2B_2}$ и $\overset{\frown}{B_2A_2}$ - противоположны по значению, поэтому суммы интегралов по этим дугам равны нулю.

В результате получим:

$\oint_{L_1'\cup L_2'}(Pdx+Qdy)=\oint_L\ (Pdx+Qdy)+\int_{\overline{A_1B_1}}(Pdx+Qdy)+\int_{\overline{B_1A_1}}(Pdx+Qdy)+$
$+\int_{\overline{A_2B_2}}(Pdx+Qdy)+\int_{\overline{B_2A_2}}(Pdx+Qdy)=\ \oint_L\ (Pdx+Qdy)+\int_{\overline{A_1B_1}}(Pdx+Qdy)-$
$-\int_{\overline{A_1B_1}}(Pdx+Qdy)+\int_{\overline{A_2B_2}}(Pdx+Qdy)-\int_{\overline{A_2B_2}}(Pdx+Qdy)=\oint_L\ Pdx+Qdy.$

Окончательно имеем: $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L\ Pdx+Qdy.$ Теорема доказана.

2.6. Условия независимости криволинейного интеграла от пути

Важнейшим свойством криволинейного интеграла 2 рода является так называемое свойство «независимости» интеграла от пути интегрирования. Однако оно справедливо не для всех криволинейных интегралов. Выяснению условий, при которых это свойство выполняется, и посвящен этот параграф.

2.6.1. Понятие независимости интеграла от пути

Пусть даны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные в некоторой области $G\subset R^2$. Область G может быть ограниченной или неограниченной областью, в частности может и совпадать со всей плоскостью R^2.

Для произвольных фиксированных точек $A,B\in G$ рассмотрим криволинейный интеграл 2 рода:

$$I(L)=\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

вдоль простой кривой $L\subset G$, соединяющей точки A и B.

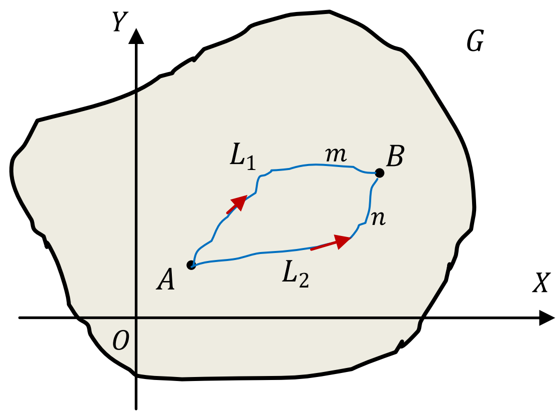


Рис. 2.30. **Иллюстрация к понятию независимости интеграла от пути**

Определение 2.6.

Если $I(L)$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки A и B, принимает одно и то же значение, то говорят, что криволинейный интеграл 2 рода не зависит от кривой, соединяющей точки A и B (а зависит только от самих точек A и B):

$$I(L_1)=I(L_2)\quad\forall L_1,L_2\subset G,\quad L_1=\overset{\frown}{AmB},\quad L_2=\overset{\frown}{AnB}\ \text{(рис. 2.30)}.$$

В этом случае криволинейный интеграл 2 рода может быть записан в виде:

$$\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\overset{\frown}{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_A^B P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

По форме записи это напоминает определенный интеграл, только вместо чисел a и b здесь стоят A и B - точки на плоскости.

Определение 2.7.

Криволинейный интеграл 2 рода $I(L)$ называется не зависящим от пути интегрирования в области G, если для любых точек $A,B\in G$ этот интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки A и B.

Наряду с интегралом $\int_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ рассмотрим интеграл по замкнутому контуру $\oint_L\ P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Здесь L - означает некоторую переменную кривую, в первом случае - произвольную кривую, во втором случае - замкнутую кривую.

Лемма 2.1.

Пусть G – произвольная область в R^2. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) Криволинейный интеграл 2 рода $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования в области G.
2) Криволинейный интеграл 2 рода $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по любому замкнутому контуру в области G равен нулю.

Доказательство.

1) Пусть $\int_L Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования в области G. Рассмотрим произвольный контур $L = (AnBmA)$ в области G (рис. 2.31).

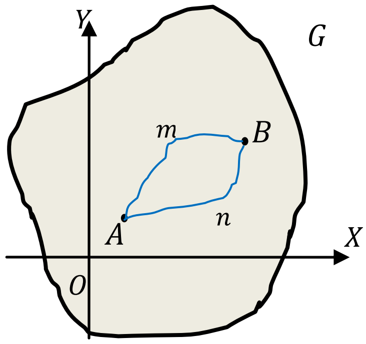


Рис. 2.31. **Иллюстрация к доказательству Леммы 2.1**

По свойствам аддитивности и антисимметричности имеем:

$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy +$
$+ \int_{\overset{\frown}{BmA}} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy - \int_{\overset{\frown}{AmB}} Pdx + Qdy.$

Так как интеграл не зависит от пути, то $\int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AmB}} Pdx + Qdy \Rightarrow$
$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy - \int_{\overset{\frown}{AmB}} Pdx + Qdy = 0.$

Значит, интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

2) Пусть $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ по любому замкнутому контуру в области G. Выбираем произвольные точки $A, B \in G$ и соединим их произвольными путями:

$$L_1 = \overset{\frown}{AmB}, \quad L_2 = \overset{\frown}{AnB}.$$

Надо доказать, что $\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$.

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда кривые L_1 и L_2 не пересекаются, т.е. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Тогда $L = (AnBmA)$ - простой замкнутый контур и, следовательно, имеем: $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Вычислим разность интегралов:

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy - \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy - \int_{\overset{\frown}{AmB}} Pdx + Qdy =$$
$$= \int_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{BmA}} Pdx + Qdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Получаем:

$\int_{L_2} Pdx + Qdy - \int_{L_1} Pdx + Qdy = 0$, т.е. $\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$.

Значит, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Лемма доказана.

2.6.2. Потенциальная вектор-функция

Введем следующее понятие.

Определение 2.8.

Вектор-функция $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ называется *потенциальной* в области G, если существует такая функция $U(x,y)$, дифференцируемая в области G, что ее полный дифференциал совпадает с подынтегральным выражением криволинейного интеграла:

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \forall\, M(x,y) \in G.$$

При этом функция $U(x,y)$ называется «*потенциалом*» вектор-функции $\vec{F}(M)$ или *первообразной* для выражения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Очевидно, что условие $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \forall\, M(x,y) \in G$ - равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \forall\, M(x,y) \in G.$$

Для выяснения условий независимости от пути криволинейного интеграла 2 рода $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в области G мы в дальнейшем будем предполагать, что:

- область G - *односвязная* область;
- функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G и в этой области существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

Замечание 2.6.

Если $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ - потенциальная вектор-функция в области G, то выполняется равенство: $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ для всех точек $M(x,y) \in G$.

Действительно:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(P(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(Q(x,y)\big) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Теорема 2.9.

Если криволинейный интеграл 2 рода: $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ - не зависит от пути интегрирования в области G, то $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ - *потенциальная* вектор-функция.

Доказательство.

Надо доказать существование функции $U(x,y)$, для которой выполняются условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \forall\, M(x,y) \in G.$$

Зафиксируем некоторую внутреннюю точку $M_0(x_0,y_0) \in G$. Для произвольной точки $M(x,y) \in G$ и произвольной дуги $\widetilde{M_0M}$, целиком лежащей в области G и соединяющей точки M_0 и M (рис. 2.32), составим криволинейный интеграл 2 рода:

$$\int_{\widetilde{M_0M}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Так как этот интеграл не зависит от пути, а зависит только от точки M (при фиксированной точке M_0), то он является функцией точки $M(x,y)$, т.е. функцией двух переменных (x,y). Введем обозначение:

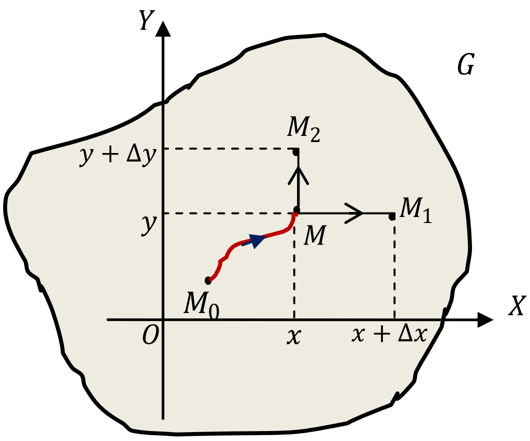


Рис. 2.32. **Иллюстрация к доказательству Теоремы 2.9**

$$U(x,y) = \int_{\widetilde{M_0M}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{M_0}^{M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Докажем, что введенная таким образом функция $U(x,y)$ является искомой функцией, т.е. для нее выполняются равенства: $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Для удобства обозначим переменные интегрирования x и y новыми буквами s и t:

$$U(x,y) = \int_{\widetilde{M_0 M}} P(s,t)ds + Q(s,t)dt = \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt.$$

По определению частных производных имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y U}{\Delta y},$$

где $\Delta_x U$, $\Delta_y U$ - частные приращения: $\Delta_x U = U(M_1) - U(M) = U(x+\Delta x, y) - U(x,y)$, $\Delta_y U = U(M_2) - U(M) = U(x, y+\Delta y) - U(x,y)$; здесь $M_1(x+\Delta x, y)$, $M_2(x, y+\Delta y)$ (рис. 2.32).

Преобразуем частное приращение $\Delta_x U$:

$$\Delta_x U = U(M_1) - U(M) = \int_{M_0}^{M_1} P(s,t)ds + Q(s,t)dt - \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt =$$
$$= \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt + \int_{M}^{M_1} P(s,t)ds + Q(s,t)dt - \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt =$$
$$= \int_{M}^{M_1} P(s,t)ds + Q(s,t)dt.$$

Так как интеграл $\int_{M}^{M_1}\{P(s,t)ds + Q(s,t)dt\}$ не зависит от пути, то в качестве дуги $\widetilde{MM_1}$ можно взять отрезок $[MM_1] = \left\{ \begin{matrix} t = const = y \\ x \leqslant s \leqslant x + \Delta x \end{matrix} \right\}$, параллельный оси OX; тогда имеем: $dt = 0$ и $\Delta_x U = \int_{M}^{M_1} P(s,t)ds = \int_{x}^{x+\Delta x} P(s,y)ds$.

Преобразуем частное приращение $\Delta_y U$:

$$\Delta_y U = U(M_2) - U(M) = \int_{M_0}^{M_2} P(s,t)ds + Q(s,t)dt - \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt =$$
$$= \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt + \int_{M}^{M_2} P(s,t)ds + Q(s,t)dt - \int_{M_0}^{M} P(s,t)ds + Q(s,t)dt =$$
$$= \int_{M}^{M_2} P(s,t)ds + Q(s,t)dt.$$

Так как интеграл $\int_{M}^{M_2} P(s,t)ds + Q(s,t)dt$ не зависит от пути, то в качестве дуги $\widetilde{MM_2}$ можно взять отрезок $[MM_2] = \left\{ \begin{matrix} s = const = x \\ y \leqslant t \leqslant y + \Delta y \end{matrix} \right\}$, параллельный оси OY; тогда имеем: $ds = 0$ и $\Delta_y U = \int_{M}^{M_2} Q(s,t)dt = \int_{y}^{y+\Delta y} Q(x,t)dt$.

Таким образом, частные приращения равны следующим значениям:

$$\Delta_x U = \int_{x}^{x+\Delta x} P(s,y)ds, \quad \Delta_y U = \int_{y}^{y+\Delta y} Q(x,t)dt.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла имеем:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} P(s,y)ds = P(s_{ср.}, y)\cdot\Delta x, \quad x \leqslant s_{ср.} \leqslant x + \Delta x;$$
$$\int_{y}^{y+\Delta y} Q(x,t)dt = Q(x, t_{ср.})\cdot\Delta y, \quad y \leqslant t_{ср.} \leqslant y + \Delta y.$$

Из непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(s_{ср.}, y) = P(x,y),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y U}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} Q(x, t_{ср.}) = Q(x,y).$$

Доказано, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$. Следовательно, $U(x,y)$ - «потенциал», т.е. $\vec{F}(M)$ - *потенциальная* вектор-функция в области G.

Теорема доказана.

2.6.3. Условия независимости интеграла от пути

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 2.2.

Пусть выполнено равенство:

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ для $\forall\, M(x,y) \in G.$

Тогда криволинейный интеграл 2 рода:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ -}$$

не зависит от пути интегрирования в области G.

Доказательство.

Ввиду односвязности области G любой простой контур L в ней ограничивает некоторую область D, которая также является односвязной областью (рис. 2.33).

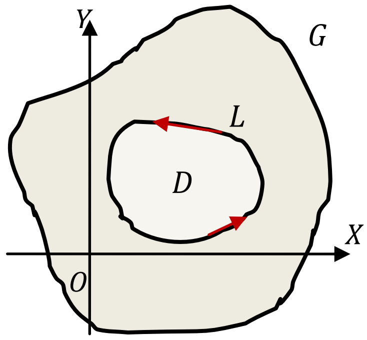


Рис. 2.33. **Иллюстрация к доказательству Леммы 2.2**

По формуле Грина (для односвязной области) имеем:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left\{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right\} dxdy = \iint_D 0dxdy = 0,$$

т.е. криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру в области G равен нулю.

Согласно Лемме 2.1 это означает, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования в области G. Лемма доказана.

Теперь можно перейти к основному утверждению данного параграфа.

Теорема 2.10 (условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути).

Пусть G - *односвязная* область, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G и в этой области существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

Тогда следующие 4 утверждения равносильны:

(α): криволинейный интеграл 2 рода $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования в области G.

(β): криволинейный интеграл 2 рода $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по любому замкнутому контуру в области G равен нулю.

(γ): $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ - *потенциальная* вектор-функция в области G.

(δ): $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ для $\forall\, M(x,y) \in G$.

Доказательство.

Выше были доказаны утверждения: $(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)$ - Лемма 2.1, $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$ - Теорема 2.9, $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ - Замечание 2.6, $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$ - Лемма 2.2.

Имеем цепочку утверждений (импликаций): $(\alpha) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta) \Rightarrow (\alpha)$, значит $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma) \Leftrightarrow (\delta)$. Следовательно, все эти 4 утверждения – действительно равносильны.

2.6.4. Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Если криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути интегрирования, то его значение на кривой равно разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой:

$$\int_{\overline{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A),$$

где $U(x,y)$ - *первообразная* функция подынтегрального выражения (или потенциал вектор-функции).

Действительно, пусть $L = \breve{AB}$ - гладкая кривая: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$ и такая, что $x(t_1) = x_A,\ y(t_1) = y_A,\ x(t_2) = x_B,\ y(t_2) = y_B$. Тогда имеем:

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\breve{AB}} dU(x,y) = \int_{t_1}^{t_2} d\{U(x(t),y(t))\} = U(x(t),y(t))\Big|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= U(x(t_2),y(t_2)) - U(x(t_1),y(t_1)) = U(x_B,y_B) - U(x_A,y_A) = U(B) - U(A).$$

Полученную формулу можно назвать обобщенной формулой Ньютона-Лейбница (по аналогии с известной формулой для определенного интеграла):

$$\boxed{\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\breve{AB}} dU(x,y) = \int_A^B dU(x,y) = U(x,y)\Big|_A^B = U(B) - U(A)}.$$

Алгоритм вычисления интеграла по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Чтобы вычислить криволинейный интеграл 2 рода: $\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ - по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница, необходимо выполнить следующие действия.

1. Убедиться в том, что криволинейный интеграл не зависит от пути, т.е. подынтегральная функция является полным дифференциалом. Для этого следует проверить равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \text{для } \forall\, M(x,y) \in G.$$

2. Найти первообразную функцию подынтегрального выражения (потенциал вектор-функции), т.е. составить и решить систему уравнений относительно $U(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}.$$

3. Вычислить разность значений потенциала в конечной и начальной точках, т.е. применить формулу: $\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A)$.

Пример 2.15.

Вычислить $I = \int_{\breve{AB}} (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$, где $A(1;2)$, $B(-1,1)$.

Решение.

1. Здесь $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,\ Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$,
   $\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (6x^2y + 4y^3)'_x = 12xy,$
   $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \text{для } \forall M(x,y) \in R^2.$

Следовательно, данный криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути.

2. Составляем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \end{cases}.$

Выберем одно из этих уравнений для его интегрирования, например, первое уравнение:

$$U(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y).$$

Подставим найденное значение $U(x,y)$ во второе уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3x^2y^2 + C(y)\right) = 6x^2y + C'_y(y) = 6x^2y + 4y^3 \ \Rightarrow\ C'_y(y) = 4y^3 \ \Rightarrow C(y) = y^4$$

$\Rightarrow\ U(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$ - первообразная функция подынтегрального выражения.

3. $I = (x^3 + 3x^2y^2 + y^4)|_A^B = U(-1,1) - U(1;2) = 3 - 29 = -26.$

Ответ: $I = -26.$

Понятие *потенциальной* вектор-функции легко обобщается на 3-хмерный случай. Рассмотрим криволинейный интеграл 2 рода вдоль пространственной кривой L:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Определение 2.9.

Вектор-функция $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ - называется *потенциальной* в области $G \subset R^3$, если существует дифференцируемая в области G функция $U(x,y,z)$ такая, что ее полный дифференциал равен подынтегральному выражению:

$$dU(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \quad \forall\, M(x,y,z) \in G.$$

При этом функция $U(x,y,z)$ называется *потенциалом* вектор-функции $\vec{F}(M)$ или *первообразной* для выражения $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$

Очевидно, что условие: $dU(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ $\forall\, M(x,y,z) \in G$ - равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z). \\ \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) \end{cases}$

Здесь также имеет место обобщенная формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\overline{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{\overline{AB}} dU(x,y,z) = \int_A^B dU(x,y,z) =$$
$$= U(x,y,z)|_A^B = U(B) - U(A) = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

Из этой формулы следует, что в случае потенциальной вектор-функции криволинейный интеграл 2 рода вдоль пространственной кривой также не зависит от пути, а зависит только от его начала и конца.

Общие условия независимости криволинейного интеграла 2 рода вдоль пространственной кривой будут обсуждаться далее в главе **4** «Элементы теории поля».

Пример 2.16.

Вычислить:

а) $I = \int_{\overline{AB}} xdx + 3y^2dy - 2z^3dz$, где $A(2;1;0)$, $B(4;\ -1;2)$;

б) $I = \int_{\overline{AB}} yzdx + xzdy + xydz$, где $A(4;\ 1;1)$, $B(1;2;3)$.

Решение.

а) $I = \int_{\overline{AB}} xdx + 3y^2dy - 2z^3dz = \int_{\overline{AB}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d(y^3) - d\left(\frac{z^4}{2}\right) = \int_{\overline{AB}} d\left(\frac{x^2}{2} + y^3 - \frac{z^4}{2}\right) =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + y^3 - \frac{z^4}{2}\right)|_A^B = (8 - 1 - 8) - (2 + 1 - 0) = -4.$

б) $I = \int_{\overline{AB}} yzdx + xzdy + xydz = \int_{\overline{AB}} d(xyz) = (xyz)|_A^B = 1{\cdot}2{\cdot}3 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = 6 - 4 = 2.$

Ответ: а) $I = -4$; б) $I = 2$.

Приложения криволинейных интегралов 2 рода.

Площадь плоской фигуры: $S(D) = \frac{1}{2}{\cdot}\oint_L (xdy - ydx).$

Работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L:

$\mathcal{A} = \int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ - для плоской кривой;

$\mathcal{A} = \int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ - для пространственной кривой.

Пример 2.17.

Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой:

$$\begin{cases} x = a \cdot cos^3 t \\ y = a \cdot sin^3 t \end{cases} \text{ (рис. 2.34).}$$

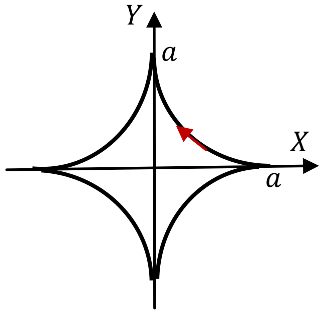


Рис. 2.34. **К Примеру 2.17**

Решение.

Вычислим площадь по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \oint_L (xdy - ydx).$$

При обходе фигуры вдоль кривой в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π. Следовательно, имеем:

$S = \frac{1}{2} \cdot \oint_L (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \{acos^3 t \cdot 3asin^2 t \cdot cos\, t + asin^3 t \cdot 3acos^2 t \cdot sin\, t\}\, dt =$

$= \frac{1}{2} 3a^2 \int_0^{2\pi} (cos^4 t \cdot sin^2 t + sin^4 t \cdot cos^2 t)dt = \frac{1}{2} 3a^2 \int_0^{2\pi} cos^2 t \cdot sin^2 t\, dt =$

$= \frac{1}{2} 3a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot sin^2 2t\, dt = \frac{1}{8} 3a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - cos\, 4t}{2} dt = \frac{1}{16} 3a^2 \left(t - \frac{1}{4} sin\, 4t\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{8}.$

Ответ: $S = \frac{3a^2\pi}{8}$.

Пример 2.18.

Найти работу силы $\vec{F} = 4x^6 \cdot \boldsymbol{i} + xy \cdot \boldsymbol{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 1)$.

Решение.

Вычислим работу по формуле: $\mathcal{A} = \int_L \vec{F}(M) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

В нашем случае получим:

$\mathcal{A} = \int_L (4x^6 \cdot dx + xy \cdot dy) = \int_0^1 (4x^6 \cdot dx + x \cdot x^3 \cdot 3x^2 \cdot dx) = \int_0^1 7x^6 dx = x^7 |_0^1 = 1.$

Ответ: $\mathcal{A} = 1$.

Литература.

1. *Аксенов, А. П.* Математический анализ в 4 ч. Часть 4: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — М. : Изд-во Юрайт, 2019.

2. *Потапов, А. П.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Изд-во Юрайт, 2016.

3. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2-х ч. Часть 1: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Изд-во Юрайт, 2017.

4. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2-х ч. Часть 2: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Изд-во Юрайт, 2017.

5. *Потапов, А. П.* Математический анализ. Дифференциальное исчисление ф.н.п. Уравнения и Ряды: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Изд-во Юрайт, 2019.